**Modelos de Regressão Logística aplicados a churn de clientes - estudo de caso**

Emerson Donizeti Batista¹\*;Mateus Modesto2

1 Analista de Sistemas. Rua Alberto Segalla, 1-33 – apto 411 – Jd. Infante Dom Henrique. 17012-634 Bauru, São Paulo, Brasil.

**Modelos de Regressão Logística aplicados a *churn* de clientes - estudo de caso**

**Resumo**

Devido aos constantes avanços nas áreas do conhecimento direcionados à previsão dos comportamentos dos clientes em diversas áreas, a utilização de modelos matemáticos se mostra útil e necessária para se construir modelos preditivos com relação a **churn de clientes**, ou seja, a previsão de que um cliente possa a vir a cancelar um serviço. O presente trabalho se destina a analisar os resultados obtidos através de algoritmos de **Regressão Logística Binaria Multinomial** numa base de dados de cliente de telecomunição em sua perspectiva do *churn*, ou seja, do cancelamento dos clientes no último mês analisado. Através das análises realizadas utilizando a linguagem R (e o RStudio com seus pacotes de estatística), com indicadores como máxima verossimilhança (LL), AIC e Sensibilidade, Sensitividade e Acuracidade, tem-se a noção avaliação destes modelos GLM.

**Palavras-chave:** Regressão Logística, *Churn*

**Forecasting models applied to customer churn - case study**

**Abstract**

Due to the constant advances in the areas of knowledge aimed at predicting customer behavior in several areas, the use of mathematical models proves to be useful and necessary to build predictive models regarding customer churn, that is, the prediction that a customer will may cancel a service. The present work is intended to analyze the results obtained through Multinomial Binary Logistic Regression algorithms in a telecommunication customer database in its churn perspective, that is, the cancellation of customers in the last analyzed month. Through the analyzes carried out using the R language (and RStudio with its statistical packages), with indicators such as maximum likelihood (LL), AIC and Sensitivity, Sensitivity and Accuracy.

**Keywords: Logistic Regression, Churn**

**Introdução**

É geralmente mais caro conquistar novos clientes do que manter os já existentes. Em muitos setores, o custo de aquisição de novos clientes pode ser cinco vezes superior ao seu custo de retenção (KURTZ e CLOW, 1998). Na indústria de telecomunicações, por exemplo, o custo de aquisição foi empiricamente auferido entre cinco e oito vezes superior ao custo de retenção do cliente (AU e outros., 2003).

Conhecer melhor o cliente é o desafio para qualquer organização que busca elevar seu nível de atendimento, bem como seus resultados financeiros. Uma vez indicados os fatores críticos de sucesso, seja por pesquisas ou análise de bases-de-dados, emerge a necessidade de obter predição e inteligência através de modelos matemáticos e estatísticos.

Por exemplo, em vez de focar em todos os *prospects* ou fornecer incentivos iguais para todos, uma empresa pode selecionar apenas aqueles clientes que se enquadram em certos critérios de rentabilidade, baseados nas necessidades individuais e padrões de compra (PriceWaterHouseCoopers, 1999). Neste sentido, reforçam Bounsaythip e Rinta-Runsala (2001) que isso pode ser conseguido através da construção de modelos de predição do valor futuro de um indivíduo baseado em dados demográficos, estilo de vida ou comportamentos anteriores. O modelo produz informações que irão focar tanto a retenção quanto programas de recrutamento, a fim de construir e manter a base de clientes mais rentável. A isso se dá o nome de *customer behavior modeling (CBM)* ou perfil de cliente. A identificação do perfil de cliente é uma ferramenta para focar no melhor entendimento de marketing sobre as características de sua base de dados.

A motivação de longo prazo para a montagem de perfis de consumidores é converter este entendimento numa interação automatizada com esses consumidores, como afirmam Berson & Thearling (2001). Estes reforçam que para estas tarefas os mercados precisam de vasta gama de processos e ferramentas de tecnologia. Estas ferramentas têm sido usadas para coletar dados e simplificar os processos de extrair conhecimento sobre o mercado e planejar campanhas de marketing. As ferramentas de mineração de dados têm sido usadas para identificar grupos significativos em dados históricos. Por exemplo, aplicam-se a critérios de seleção para mala-direta, ou identificar mercados com alto potencial, ou mídias ou estilos de vida que vão ao encontro dos consumidores. Em suma, tais ferramentas possibilitam encontrar padrões humanos de comportamento que descrevem os dados; eles também permitem utilizar algumas variáveis para predizer valores futuros ou desconhecidos de outras variáveis.

Assim, a busca por compreensão dos mecanismos de explicação para tomada de decisões dos clientes, aplicada à questão dos cancelamentos (*churn*), se alinha com esta necessidade premente de se compreender o comportamento do cliente. A proposta será de discutir modelo matemático estatístico para ajudar na compreensão do fenômeno, ainda que existam vários outros, pois, conforme salienta (Dio, 1979) se a verdade é uma só – ainda que, por vezes, vista de ângulos diferentes –, os caminhos que conduzem os pesquisadores a ela podem ser diversos. E a diversidade de métodos, mais do que um inconveniente, é uma vantagem. Sendo assim, quando, por técnicas ou processos diferentes, se chega à mesma conclusão, há maior razão para aceitá-la.

Analisando as plataformas online de publicações acadêmicas (*Google Scholar*, *Elsevier* e *SciELO*), encontramos em torno de 18.000 trabalhos sobre o *churn* de clientes da área de *telecom* desde 2017. Eis alguns exemplos: *"A Churn Prediction Model Using Random Forest: Analysis of Machine Learning Techniques for Churn Prediction and Factor Identification in Telecom Sector"* (ULLAH e outros, 2019). Foi utilizada também a técnica de *boosting* no trabalho *"A Customer Churn Prediction Model in Telecom Industry Using Boosting"* (LU, 2012). Inúmeros outros trabalhos tiveram outras abordagens, reforçando a importância do tema e da atenção que tem merecido entre os pesquisadores.

Especificamente a utilização de GLM (*Generalized Linear Models*) para análise de "*churn*" já foi aplicada em trabalhos acadêmicos por (McGowan, Donal et al., 2011), (Dash, Singh, Kunwar & Ravendra) e por (Stripling e outros, 2015), oferecendo informações significativas de incentivo à continuidade de investigação do tema.

Da mesma família dos GLM, a técnica multinível também já foi aplicada na análise de *churn* por (Ahmed & Linen, 2017) e no trabalho realizado por (Seo, Ranganathan, Babad, 2008) que focaram na análise de *churn* em área de *telecom*. Portanto, essa linha de análise com utilização de métodos da família GLM já possui importantes trabalhos anteriores realizados. No caso específico deste trabalho, faremos avaliação da melhor assertividade e acurácia dos resultados entre os dois modelos. Neste sentido, o resultado deste trabalho poderá reforçar, ou refutar, a aplicabilidade destas técnicas neste tipo de base de dados, pois algum dado presente pode induzir a vieses não detectadas em trabalhos anteriores.

Por fim, cumpre ressaltar que em ambientes corporativos altamente digitalizados, com informações coletadas em volume e diversidade, sabe-se que as empresas possuem um grande tesouro em suas mãos, que são os dados. Obter, analisar e compreender esses dados tem se mostrado a nova corrida do ouro, em que os mais eficazes obterão os melhores resultados e geração de riqueza. Neste sentido, concordam (Tjaden & Cohen, 2006) pois, em que pesem a enorme gama de fontes de informação, observa-se que se torna inviável, para uma grande quantidade de dados, a extração de informações sem o uso de ferramentas computacionais. Refinar e enriquecer os critérios de escolha de métodos de análises de dados reforçam a necessidade de mais trabalhos nesta linha de pesquisa.

1. **Material e Métodos**

Os dados do problema serão obtidos da plataforma online Kaggle (*site*) de uma empresa no ramo de telecomunicações (*Telco*).

Através do software RStudio, com a linguagem R, serão carregados diversos pacotes auxiliares.

As variáveis do problema são essas:

|  |  |
| --- | --- |
| **Variável** | **Categoria** |
| ***CustomerId*** | Identificação da linha |
| ***Gender*** (Gênero) | dicotômica (*male* / *female*) |
| ***SeniorCitzen*** (Idoso) | dicotômica (0-1) |
| ***Partner*** (possui parceiro) | dicotômica (0-1) |
| ***Dependents*** (possui dependentes) | dicotômica (0-1) |
| ***Tenure*** (meses de uso do serviço) | quantitativa discreta |
| ***Phone Service***(possui serviço de telefone) | dicotômica (yes-no) |
| ***Multiple Lines*** (possui múltiplas linhas) | policotômica |
| ***InternetService***  (tipos de serviços de internet) | policotômica |
| ***Online Security***  (possui serviço de segurança online) | policotômica |
| ***OnlineBackup***  (possui backup online) | policotômica |
| ***DeviceProtection***  (possui dispositivo de proteção) | policotômica |
| ***TechSupport***  (possui suporte técnico) | policotômica |
| ***StreamingTV***  (possui streaming de TV) | policotômica |
| ***StreamingMovies***  (possui streaming de filmes) | policotômica |
| ***Contract***  (periodicidade do contrato) | policotômica |
| ***PaperlessBilling***  (fatura eletrônica) | dicotômica |
| ***PaymentMethod***  (forma de pagamento) | policotômica |
| ***MonthlyCharges***  (valor da fatura mensal) | quantitativa contínua |
| ***TotalCharges***  (total faturado) | quantitativa contínua |
| ***Churn*** | dicotômica |

Tabela 1 – Lista das variáveis presentes na base

Fonte: Elaborado pelo autor.

1.1 Regressão Logística Binária e Multinomial:

Desde a década de 70, foi possível o desenvolvimento computacional de modelos que exigiam iteração na estimação de parâmetros. Assim, (McCullagh & Nelder, 1989) propuseram os GLM “*Generalized Linear Models*” que consistia na ampliação da distribuição da variável de resposta, de forma que pertencesse à família exponencial de distribuições, dando flexibilidade para a relação funcional entre a média da variável de resposta (μ) e o preditor linear (η). O resultado destes estudos permitiu aplicar, por exemplo, transformação na variável de resposta Y para normalizá-la utilizando a distribuição *Poisson* em dados de contagem, fazendo a relação funcional entre a média de Y e o preditor linear η = log μ. Isso permitiu melhoria na estimação, já que garantiria um valor positivo para quaisquer valores dos parâmetros do preditor linear.

Segundo (Fávero & Belfiore, 2017) a Regressão Logística Binária e Multinomial consiste no modelo em que há mais de duas variáveis dependentes, categóricas, binárias e variáveis independentes métricas ou não métricas. Além disso, esta relação expressa a probabilidade de ocorrência do evento diante das variáveis às quais os objetos ou sujeitos estão expostos, sendo possível uma taxa de risco de cada variável explicativa do modelo. O objetivo principal aqui é encontrar a função logística, obtida por meio da ponderação das variáveis, permitindo dar peso a estas ocorrências. Os pré-requisitos para este modelo são:

* variáveis x dicotômicas ou quantitativas;
* relação linear entre o vetor X e a variável Y;
* valor dos resíduos igual a zero. Para verificação desta condição aplicaremos o teste de (Shapiro & Francia, 1972);
* ausência de heterocedasticidade e multicolinearidade. Através do diagnóstico de (Breusch & Pagan, 1980), analisaremos se está presente, significando que pode ter havido omissão de alguma variável.

Para estimação dos parâmetros, aplicamos o processo iterativo chamado Método da Máxima Verossimilhança, ou “*Maximum Likelihood Estimation*”. Em seguida, serão avaliados o teste de χ2 e os resultados dos testes z para os parâmetros estimados das variáveis preditoras.

Na equação abaixo está o modelo geral da regressão Logística Binária e Multinomial:

Sendo a probabilidade de ocorrência do evento, temos que:

Probabilidade de ocorrência da categoria 0 (referência):

Probabilidade de ocorrência da categoria 1:

Probabilidade de ocorrência da categoria 2:

Para análise da base, utilizando o RStudio, seguiremos, em princípio, os seguintes passos:

* carregamento da base;
* visualização da base;
* estimação de modelo logístico binário;
* procedimento *stepwise*;
* extração do valor de *Log-Likelihood.*
* cálculo de R², RMSE (Erro quadrático médio) e MAPE (Erro percentual quadrático médio),
* cálculo de AIC e BIC;
* construção de matriz de confusão;
* consulta de matriz de confusão para diferentes *cutoffs;*

teste igualando critérios de sensitividade e especificidade;

* construção da curva ROC;
* testes de predição (função *predict*).

1.2 Testes comparativos:

Para avaliação dos modelos utilizaremos o R², RMSE (Erro quadrático médio) e MAPE (Erro percentual quadrático médio), conforme observados nos trabalhos de (Wallach & Goffinet, 1989) e (De Myttenaere, 2016).

A performance final geral aferida entre os modelos será através do *Log Likelihood* conforme descrito em (WOOLF, 1957).

Será analisado também curva ROC (*Receiver Operating Characteristic*). A curva ROC é uma métrica para avaliação de modelos, que permite estudar a variação para as medidas de sensibilidade e especificidade do modelo, para diferentes valores de ponto de corte (FAWCETT, 2006).

Além destes utilizaremos AIC e BIC para analisar modelos. Modelo com AIC menor do que outro, o BIC vai ser menor também. Estes conceitos estão discutidos em (PENNY, 2012) em que discute a avaliação de performance de algoritmos através de BIC (*Bayesian information criterion*) e AIC (*Akaike Information Criterion*).

Para analisar multicolinearidade das variáveis, utilizaremos o Fator de Inflação da Variância (VIF), conforme descrito por (MONTGOMERY; PECK; VINING, 2006), cuja fórmula é:

Nesta fórmula, p é o número das variáveis preditoras; é o coeficiente de correlação múltipla, resultante da regressão de Xj nos outros p-1 regressores. A matriz de variâncias e covariâncias para as estimativas dos coeficientes de regressão padronizados é:

Se o valor de o valor for próximo a um, isto significa que existe uma alta correlação entre a variável Xj e as demais variáveis, então 1- estará próximo de zero e consequentemente, o VIF assumirá um valor grande, apontando para o envolvimento dessa covariável em colinearidades. Um VIF máximo acima de 10 indica que a multicolinearidade pode estar influenciando as estimativas de mínimos quadrados (MONTGOMERY; PECK; VINING, 2006).

**Resultados e Discussão**

Analisando preliminarmente a base, observamos que há apenas 11 valores faltantes nas variáveis *TotalCharges*. E estas linhas serão eliminadas pare efeito do estudo.

Há 4 variáveis contínuas *Tenure*, *MonthlyCharges*, *TotalCharges* e *SeniorCitizen*, esta última será convertida em variável categórica. A coluna *Churn* representa o número de clientes que deixaram o plano no último mês. Podemos observar que 26% dos clientes deixaram a plataforma no último mês.

Gráfico, Gráfico de barras

Descrição gerada automaticamente

Figura 1 – Percentual de *churn* de clientes no último mês. Fonte: Elaborado pelo autor.

Na análise, podemos verificar que *Gender* é praticamente igual para masculino e feminino. O percentual é mais alto em pessoas mais velhas *SeniorCitizen*. Os consumidores com parceiros *Partner* e dependentes tem *Churn* menor comparado àqueles que não possuem parceiros ou dependentes.

Gráfico, Gráfico de barras

Descrição gerada automaticamente

Figura 2 – Percentual de *Churn* de clientes agrupados pelas variáveis *gender*, *SeniorCitizen*, *Partner*, *Dependents*, *PhoneService* e *MultipleLines*. Fonte: Elaborado pelo autor.

O *Churn* é muito maior em casos de Fibra Ótica (*FiberOptic*) e serviços de internet (*InternetServices*). Clientes que não possuem serviços de segurança online (*OnlineSecurity*), *backup* online (*OnlineBackup*) e suporte técnico (*TechSupport*) deixaram a plataforma no último mês.

A maioria dos clientes com assinatura mensal deixou o plano no último mês comparado com aqueles que tem plano de um ou dois anos de fidelidade. Observa-se também que aqueles que fazem pagamento de forma eletrônica tem maior *churn* do que os que não utilizam esta opção.

Gráfico, Gráfico de barras

Descrição gerada automaticamente

Figura 3 – Percentual de *Churn* de clientes agrupados pelas variáveis *gender*, *SeniorCitizen*, *Partner*, *Dependents*, *PhoneService* e *MultipleLines*. Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico, Gráfico de barras

Descrição gerada automaticamente

Figura 4 – Percentual de Churn de clientes agrupados pelas variáveis *StreamingMovies*, *Contract*, *PaperlessBilling* e *PaymentMethod*. Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico, Gráfico de caixa estreita

Descrição gerada automaticamente

Figura 5 – *Box plot* de *Tenure*: A média de tempo que os clientes saíram do plano (*Tenure*) foi de 10 meses.

Fonte: Elaborado pelo autor.

|  |  |
| --- | --- |
| Gráfico, Gráfico de caixa estreita  Descrição gerada automaticamente  Figura 6 – *Box plot* de *MonthlyCharges*: Clientes que saíram do plano tiveram maior média mensal, acima de 75 dólares.  Fonte: Elaborado pelo autor. | Gráfico, Gráfico de caixa estreita  Descrição gerada automaticamente  Figura 7 – *Box plot* de *TotalCharges*: A média de total pago (*TotalCharges*) dos clientes que saíram do plano é mais baixa do que os que ficaram no plano.  Fonte: Elaborado pelo autor. |

Conforme verificado abaixo na Figura 8, o total pago (*TotalCharges*) tem correlação positiva com pagamentos mensais (*MonthlyCharges*) e com o tempo de permanência do cliente (*Tenure*).

Gráfico

Descrição gerada automaticamente

Figura 8 – Gráfico da correlação entre as variáveis quantitativas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

No gráfico abaixo foram avaliadas as variáveis quantitativas para identificação de possíveis *outliers*. No caso, não foram identificados outliers, ficando os quartis distribuídos conforme os gráficos de *box* *plot* abaixo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Gráfico, Gráfico de caixa estreita  Descrição gerada automaticamente*Tenure* | Gráfico, Gráfico de caixa estreita  Descrição gerada automaticamente  *MonthlyCharges* | Gráfico, Gráfico de caixa estreita  Descrição gerada automaticamente*TotalCharges* |

Figura 9 – Verificação de possíveis outliers nas variáveis quantitativas

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para fins de análise, faremos a padronização das variáveis contínuas através do processo *zscore,* que consiste emsubtrair a média do valor e dividir pelo desvio padrão, ou seja:

*.*

Para transformar a variável *Tenure* em categórica, criaremos faixas de tempo: 0-1 ano, 1-2 anos, 2-3 anos, 3-4 anos, 4-5 anos e 5-6 anos. Após o procedimento podemos ter uma visão do tempo de permanência dos clientes através destas faixas:

Gráfico, Gráfico de barras

Descrição gerada automaticamente

Figura 10 – Gráfico da distribuição do churn de clientes conforme os tempos de permanência no plano (*Tenure*).

Fonte: Elaborado pelo autor.

O próximo passo será utilizar transformar as variáveis categóricas em *dummy* para preparar para a aplicação a regressão logística.

Primeiramente vamos rodar o modelo glm em função de todas as variáveis para obter um primeiro resultado. No primeiro modelo, utilizando o comando *glm(formula = Churn ~ ., family = “binomial”, data = telco)*, já verificamos que algumas variáveis não são significativas, como: *gender*, *SeniorCitizen*, *Partner*, *Dependents*, *PhoneService*, *TotalCharges*, *PhoneService*, *MultipleLines* cujo *p-value* não atinge os 5% de significância.

O modelo acima foi executado em função de todas as variáveis, obtendo AIC 4191.8 e também um LL (*Loglik*) de 2880.817 (df=29). Assim, para avaliar o efeito, aplicamos o procedimento *stepwise* que eliminou variáveis e devolveu o modelo otimizado, mais parcimonioso. Após o *stepwise*, observemos que neste caso o LL (*loglik*) melhorou para -2072.641 (df=17).

Para verificar se as variáveis resultantes serão úteis, podemos utilizar o fator de inflação (VIF – *Variance Inflation Factor*) para eliminar as preditoras redundantes, ou variáveis que possuem multicolinearidade entre elas. Sabemos que multicolinearidade existe quando duas ou mais preditoras estão altamente relacionados entre si o que torna difícil de se identificar o impacto de uma variável independente na variável dependente.

O fator de inflação de variância é usado para medir colinearidade entre o preditor e as variáveis em um modelo. O preditor tendo VIF de 2 ou menos geralmente é considerado seguro e pode ser assumido que não é correlacionado com outra variável preditora. Quanto maior o VIF, maior é a correlação da variável preditora com relação a outras variáveis preditoras. No entanto, preditoras com alto VIF podem ter um alto *p-value,* então nós precisamos ver se a significância da variável preditora antes de removê-la do nosso modelo. Na tabela abaixo, vemos a verificação deste indicador:

|  |  |
| --- | --- |
| Variável | VIF (*Variance Inflation Factor)* |
| Tenure | 2.28202938252177 |
| MonthlyCharges | 1.36710448662678 |
| SeniorCitizen | 1.07549782838843 |
| Partner | 1.0850777425478 |
| InternetService.xFiber.optic | 1.51965646028765 |
| InternetService.xNo | 1.50968312367304 |
| OnlineSecurity | 1.08731915423691 |
| OnlineBackup | 1.1507539861523 |
| TechSupport | 1.14590887881309 |
| StreamingTV | 1.2910887570152 |
| Contract.xOne.year  Contract.xTwo.year | 1.20389597503293  1.21287098023456 |
| PaperlessBilling | 1.1114379348036 |
| PaymentMethod.xElectronic.check | 1.12841090113757 |
| tenure\_bin.x1.2.years | 1.05189633522886 |
| tenure\_bin.x5.6.years | 2.00546783405504 |

Tabela 2 – Valores VIF para as variáveis

Na tabela 2, acima, observemos que diversas variáveis não significativas foram removidas pelo *stepwise*, como *DeviceBackup* e *DeviceProtection*, o que nos resultou em novo modelo para o qual executaremos as análises de eficácia e área da curva ROC (*AUC -* *Area Under Curve*).

Agora vamos avaliar usando dados de validação, supondo um *cutoff*s:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 50% | 70% | 30% |
| Sensitividade | 0.5107 | 0.2353 | 0.7513 |
| Especificidade | 0.9003 | 0.9758 | 0.7783 |
| Acurácia | 0.7967 | 0.7790 | 0.7711 |

Tabela 3 – Análise de sensibilidade, especificidade e acurácia do modelo glm.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebemos que um *cutoff* de 0,50 temos boa acurácia e especificidade, porém baixa sensitividade. Assim, temos que encontrar a maximização do *cutoff* que nos dará máximas acurácia, sensitividade e especificidade:

Gráfico, Gráfico de linhas

Descrição gerada automaticamente

Figura 11 – Gráfico de sensitividade, especificidade e acurácia para 0,50 de *cutoff*.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base na Figura 11, vamos escolher *cutoff* de 0.32 para nosso modelo final, uma vez que as curvas para acuracidade, sensitividade e especificidade se encontram.

Gráfico, Gráfico de linhas

Descrição gerada automaticamente

Figura 12 – Curva ROC do modelo glm.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tendo como base o modelo GLM, iremos comparar seus resultados com dois outros modelos de machine learning: Decision Tree e Random Forrest.

**Gráfico, Diagrama

Descrição gerada automaticamente**

Figura 12 – Gráfico comparativo de área sob curva ROC.

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Conclusões**

Após carga e tratamento dos dados, foram executados os procedimentos de análise da mesma base de dados utilizando os algoritmos de regressão logística. Na regressão logística utilizamos a função glm dentro do RStudio.

**Agradecimento**

Agradeço à minha família e ao meu orientador pela paciência e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

**Referências**

1. Tjaden, B.; Cohen, J. A survey of computational methods used in microarray data interpretation. In: Applied Mycology and Biotechnology. [S.l.]: Elsevier, 2006. v. 6, p. 161–178.
2. Chen, Y.; Wong, M. L. An ant colony optimization approach for stacking ensemble. In: IEEE. Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC), 2010 Second World Congress on. [S.l.], 2010. p. 146–151.
3. Gil, A. C. (2002) Como elaborar projetos de pesquisa. 4a. ed. São Paulo: Atlas S/A.
4. Fávero, L. P., & Belfiore, P. (2017). Manual de Análise de Dados Estatística Modelagem Multivariada Com Excel, SPSS E Stata. In Elsevier.
5. Bryk A. S, & Raudenbush, S. W. (1992). Hierarchical linear models: applications and data analysis methods. 2. ed. Thousand Oaks: Sage Publications.
6. Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2013). Using multivariate statistics. 6. ed. Boston: Pearson.
7. Shapiro, S. S. & Francia, R. S. (1972). Approximate analysis of variance test for normality.J. Am. Statist. Assoc. 67, 215-25.
8. Breusch, T., & Pagan, A. (1980). The Lagrange multiplier test and its applications to model specification in econometrics, The Review of Economic Studies, 47(1):239-254
9. Dio, R. A. T. D. (1979). Prefácio à edição brasileira. In: CAMPBELL, D. T.; STANLEY, J. C. Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa. São Paulo: EPU.
10. Bounsaythip, C. & Rinta-Runsala, E. (2001) Overview of Data Mining for Customer Behavior Modeling. Louhi. Research Report TTE1-2001-18.
11. PriceWaterHouseCoopers. (1999) *The CRM Handbook: from Group to multiindividual*.
12. Berson, A. & Thearling, K. (2001), "Building Data mining Applications for CRM". McGraw-Hill, 2000.
13. McGowan, Donal et al. (2011) Churn prediction in mobile telecommunications. In: Pro

ceedings of the 22nd Irish Conference on Artificial Intelligence and Cognitive Science.

1. E. Stripling, S. vanden Broucke, K. Antonio, B. Baesens and M. Snoeck, 2015. "Profit maximizing logistic regression modeling for customer churn prediction," 2015 IEEE International Conference on Data Science and Advanced Analytics (DSAA), pp. 1-10, doi: 10.1109/DSAA.2015.7344874.
2. A. Ahmed and D. M. Linen, 2017, "A review and analysis of churn prediction methods for customer retention in telecom industries," 2017 4th International Conference on Advanced Computing and Communication Systems (ICACCS), pp. 1-7, doi: 10.1109/ICACCS.2017.8014605.
3. SEO, DongBack; RANGANATHAN, C.; BABAD, Yair. Two-level model of customer retention in the US mobile telecommunications service market. Telecommunications policy, v. 32, n. 3-4, p. 182-196, 2008.
4. DASH, Manoj; SINGH, Kunwar Ravendra. Churn Prediction in Telecom Industry Using R.
5. DE MYTTENAERE, Arnaud et al. Mean absolute percentage error for regression models. Neurocomputing, v. 192, p. 38-48, 2016.
6. WALLACH, Daniel; GOFFINET, Bruno. Mean squared error of prediction as a criterion for evaluating and comparing system models. Ecological modelling, v. 44, n. 3-4, p. 299-306, 1989.
7. WOOLF, Barnet. The log likelihood ratio test (the G‐test). Annals of human genetics, v. 21, n. 4, p. 397-409, 1957.
8. PENNY, William D. Comparing dynamic causal models using AIC, BIC and free energy. Neuroimage, v. 59, n. 1, p. 319-330, 2012.
9. AU, W; CHAN, C. C; YAO, X. A novel evolutionary data mining algorithm with applications to churn prediction. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 7, n. 6, p. 532-545, 2003.
10. KURTZ, D. L; CLOW, K. E. Services marketing New York: John Wiley & Sons, 1998.
11. FAWCETT, Tom. ROC graphs with instance-varying costs. Pattern Recognition Letters, v. 27, n. 8, p. 882-891, 2006.
12. I. Ullah, B. Raza, A. K. Malik, M. Imran, S. U. Islam and S. W. Kim, "A Churn Prediction Model Using Random Forest: Analysis of Machine Learning Techniques for Churn Prediction and Factor Identification in Telecom Sector," in IEEE Access, vol. 7, pp. 60134-60149, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2914999.
13. LU, Ning et al. A customer churn prediction model in telecom industry using boosting. IEEE Transactions on Industrial Informatics, v. 10, n. 2, p. 1659-1665, 2012.
14. SANTOS, C. A. S. T. et al. Modelagem multinível. Sitientibus, Feira de Santana, v. 22, p. 89-98, 2000.
15. MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. Introduction to linear regression analysis. John, Wiley and Sons, Inc., New York, 612p, 2006.